XLVIII OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA

Fase Única (agosto de 2024)

Nível α (6º e 7º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Gabaritos e Critérios

PROBLEMA 1 – Valor: 2 pontos

Solução.

a) O EUA pagou $24 \cdot 37{,}5 = 900$ mil dólares para os atletas do basquete citados e Hong Kong pagou $2 \cdot 768 = 1536$ mil dólares para todos os medalhistas de ouro. Assim, Hong Kong pagou $\frac{1536-900}{900} \approx 0{,}7067 = 70{,}67\ \%$ a mais para todos os seus medalhistas de ouro em comparação com os atletas de basquete dos EUA.

b) Calculando todos temos a tabela a seguir. O país com o melhor desempenho seria o Países Baixos e o país com o pior seria a Itália.

País	Posição no Quadro de Medalhas	Premiação total (em milhares de dólares)	produto posição x premiação
Itália	9	10700	96300
França	5	9400	47000
Estados Unidos	1	8300	8300
Hungria	14	3800	53200
Hong Kong	37	1900	70300
Ucrânia	22	1500	33000
Israel	41	1500	61500
Países Baixos	6	1300	7800
Nova Zelândia	11	1000	11000
Brasil	20	1000	20000
Polônia	42	1000	42000

c) O valor pago pelos EUA para os atletas da natação foi de $\frac{23}{100} \cdot 8300 = 1909$ mil dólares. Supondo que todas as 28 medalhas fossem individuais o valor máximo pago para os nadadores, considerando todas medalhas de ouro, seria $28 \cdot 37{,}5 = 1050$ mil dólares. Como esse valor é menor do que o que foi pago, podemos concluir que os EUA obtiveram alguma medalha na natação por equipes.

d) São 3 ouros e 1 por equipes, então $3 - 1 = 2$ ouros individuais.

São 7 pratas e 1 por equipes, então $7 - 1 = 6$ pratas individuais.

São 10 bronzes e 3 por equipes, então $10 - 3 = 7$ bronzes individuais.

e) No total o Brasil pagou pelas medalhas individuais

$$2 \cdot 65 + 6 \cdot 39 + 7 \cdot 23 = 525\ mil\ dólares$$

f) Vamos chamar de k a constante de proporção para os esportes com 7 ou mais atletas, ou seja, $\frac{a}{65} = \frac{b}{39} = \frac{c}{23} = k$. Dessa forma, $a = 65k$, $b = 39k$ e $c = 23k$.

Vamos calcular o valor pago para cada medalha usando o k quando for necessário

- Ouro no Voleibol de Praia Feminino – 2 atletas - $2 \cdot 65 = 130$
- Prata no Futebol Feminino – 22 atletas - $39k$
- Bronze na Ginástica por Equipes Feminina – 5 atletas - $2 \cdot 26 = 52$
- Bronze no Judô por Equipes – 10 atletas - $23k$
- Bronze no Voleibol Feminino – 13 atletas - $23k$

Considerando o valor total pago pelo Brasil por todas as medalhas:

$$525 + 130 + 39k + 52 + 23k + 23k = 1000$$

$$\Leftrightarrow 707 + 85k = 1000$$
$$\Leftrightarrow k = \frac{1000 - 707}{85} \approx 3{,}45$$

Podemos concluir que cada atleta do voleibol feminino recebeu aproximadamente $\frac{23 \cdot 3{,}45}{13} \approx 6{,}1$ mil dólares.

Critérios

Item a: 0,3 ponto

Achar que os EUA pagaram 900 mil dólares para os atletas de basquete......................0,1 ponto

Achar que Hong Kong pagou 1536 mil dólares para os medalhistas de ouro.................0,1 ponto

Concluir que Hong Kong pagou 70,67% a mais para seus medalhistas de ouro em comparação com os atletas de basquete americanos...0,1 ponto

Item b: 0,4 ponto

Afirmar que a Itália obteve o pior desempenho...0,1 ponto

Justificar tal afirmação...0,1 ponto

Afirmar que os Países Baixos obtiveram o melhor desempenho...................................0,1 ponto

Justificar tal afirmação...0,1 ponto

Item c: 0,3 ponto

Achar o valor de 1909 mil dólares pagos para os atletas de natação............................0,1 ponto

Achar que o valor pago considerando medalhas individuais seria de 1050 mil dólares..0,1 ponto

Concluir que uma medalha foi obtida no revezamento...0,1 ponto

Item d: 0,1 ponto

Obter os 3 valores corretamente... 0,1 ponto

Item e: 0,2 ponto

Obter os valores individuais gastos pelo Brasil em ao menos dois dentre ouro, prata e bronze corretamente...0,1 ponto

Concluir que o Brasil pagou 525 mil dólares em medalhas individuais.........................0,1 ponto

Item f: 0,7 ponto

Introduzir a variável k descrita na solução (a contante de proporção para esportes com 7 ou mais atletas)...0,1 ponto

Obter, em função de k, os valores pagos para cada medalha.......................................0,2 ponto

Resolver a equação e encontrar k...0,2 ponto

Concluir que cada atleta do futebol feminino recebeu aproximadamente 6,1 mil dólares...0,2 ponto

PROBLEMA 2 – Valor: 2 pontos
Solução.

a) Veja que $DE = FE - FD = a - b$. Note que $BDFG$ é um retângulo e $BD = a$. Portanto, $BC = BD - CD = a - b$.

b) Os triângulos ABC e CDE são congruentes por LAL, pois $AB = CD = b$, $BC = DE = a - b$ e $\angle ABC = \angle CDE = 90°$.

c) Seja $\angle BCA = x$. Pela congruência do item anterior, $\angle DEC = x$. Usando a soma dos ângulos internos do triângulo CDE temos $\angle ECD = 180° - \angle CDE - \angle DEC = 90° - x$. Agora, usando o ângulo raso em torno do ponto C temos

$$\angle BCA + \angle ACE + \angle ECD = 180° \Rightarrow \angle ACE = 180° - \angle BCA - \angle ECD = 180° - x - (90° - x)$$
$$\Rightarrow \angle ACE = 90°\,.$$

d) Ainda pela congruência do item b, temos $AC = CE$. Adicionando a informação do item c de que $\angle ACE = 90°$, concluímos que o triângulo ACE é retângulo isósceles e

$$\alpha = \angle CEA = \frac{180° - 90°}{2} = 45°\,.$$

Critérios

Item a: 0,3 ponto

Obter que $DE = a - b$..........0,1 ponto

Notar que $BD = a$.......... 0,1 ponto

Achar que $BC = a - b$..........0,1 ponto

Item b: 0,4 ponto

Notar que $AB = CD$..........0,1 ponto

Notar que $BC = DE$..........0,1 ponto

Notar que $ABC = CDE = 90^0$..........0,1 ponto

Concluir com esses dados que os triângulos são congruentes por LAL..........0,1 ponto

Item c: 0,6 ponto

Provar que $BCA = DEC$..........0,2 ponto

Concluir que $ECD = 90^0 - BCA$..........0,2 ponto

Concluir que $ACE = 90^0$..........0,2 ponto

Item d: 0,7 ponto

Notar que $AC = CE$..........0,3 ponto

Concluir que isso significa que os ângulos $CAE = CEA$..........0,2 ponto

Concluir que $\alpha = 45^0$..........0,2 ponto

PROBLEMA 3 – Valor: 3 pontos
Solução.

a) Não, pois o 2 não pode ser expresso como soma dos divisores de um número ímpar maior ou igual a 3.

b) Os divisores de 30 são 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 e 30. Para representar o 4 temos $1 + 3$. Para representar do 7 ao 9 podemos usar 5 mais as representações de 2 a 4: $5 + 2$, $5 + 3$ e $5 + 1 + 3$. Para representar do 11 ao 14 podemos usar 10 mais as representações de 1 a 4: $10 + 1$, $10 + 2$, $10 + 3$ e $10 + 1 + 3$. Finalmente, do 16 ao 29 basta usar 15 mais as representações de 1 até 14.

c) Não. Fatorando 102 em primos temos $102 = 2 \cdot 3 \cdot 17$. Os divisores de 102 são 1, 2, 3, 6, 17, 34, 51 e 102. Não é possível representar o número 13, pois se fosse possível teríamos que usar apenas divisores de 102 menores ou iguais a 13, os únicos são 1, 2, 3 e 6 e a soma de todos eles é $1 + 2 + 3 + 6 = 12$.

d) Sim. Vamos verificar as condições C1 e C2. Veja que $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$ e $p_1 = 2$, $p_2 = 11$ e $p_3 = 23$.

(C1) 2024 é par

(C2) $\sigma(2^3) = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$, $11 \leq \sigma(2^3) + 1$ e $p_2 \leq \sigma(p_1^{\alpha_1}) + 1$.

$\sigma(2^3 \cdot 11) = (1 + 2 + 4 + 8)(1 + 11) = 15 \cdot 12 = 180$, $23 \leq \sigma(2^3 \cdot 11)$ e $p_3 \leq \sigma(p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2}) + 1$.

Ambas as condições são satisfeitas.

e) Existem infinitas possibilidades. O importante é escolher uma e mostrar que funciona.

Um exemplo é: $2^4 \cdot 17 = 272$ é prático, pois

(C1) 272 é par

(C2) 272 tem dois fatores primos distintos $p_1 = 2$ e $p_2 = 17$.

$p_2 = 17 \leq \sigma(2^4) + 1 = 17$

Outro exemplo é: $2 \cdot 3^2 \cdot 17 = 306$ é prático, pois

(C1) 306 é par

(C2) 306 tem três fatores primos distintos $p_1 = 2$, $p_2 = 3$ e $p_3 = 17$. Usando as contas fornecidas do 198:

$p_2 = 3 \leq \sigma(2) + 1 = 3$

$$p_3 = 17 \leq \sigma(2 \cdot 3^2) + 1 = 40$$

Critérios

Item a: 0,4 ponto

Afirmar que não é possível..0,1 ponto

Afirmar que 2 não pode ser escrito como soma de números ímpares positivos distintos ou método equivalente de provar o enunciado..0,3 ponto

Item b: 0,6 ponto

Achar os divisores positivos de 30...0,2 ponto

Representar o 4..0,1 ponto

Representar de 7 ao 9...0,1 ponto

Representar de 11 ao 14...0,1 ponto

Representar de 16 ao 29...0,1 ponto

Item c: 0,6 ponto

Afirmar que a resposta é não..0,1 ponto

Fatorar 102..0,2 ponto

Achar um número menor que 102 que é maior que a soma dos divisores de 102 menores que tal número ou método equivalente de prova que 102 não é prático.............................0,3 ponto

Item d: 0,7 ponto

Atenção: o aluno que se utilizar de um algoritmo parecido com o do item b para mostrar que 2024 é prático pode ganhar o ponto de fatoração abaixo e caso sua tentativa seja bem-sucedida, ele ganha 0,6, mas, caso haja algum erro na sua solução, ele ganha 0 pontos, pois ignorou o estímulo da questão.

Fatorar 2024..0,1 ponto

Verificar C1 (2024 é par)..0,1 ponto

Verificar C2 para 11...0,2 ponto

Verificar C2 para 23...0,3 ponto

Item e: 0,7 ponto

Atenção: semelhantemente ao item anterior, o aluno que se utilizar de um algoritmo parecido com o do item b para mostrar que seu número é prático poderá receber 0,3 pontos se o número achado for prático (independentemente do sucesso de sua demonstração) e 0,4 ponto se ele executar o algoritmo sem erros e 0 caso contrário, pois ignorou o estímulo da questão.

Achar número múltiplo de 17 com a condição dada..0,3 ponto

Mostrar que o número achado é par...0,1 ponto

Mostrar que o número satisfaz C2...0,3 ponto

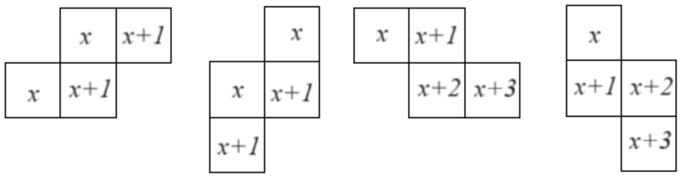
PROBLEMA 4 – Valor: 3 pontos

Solução.

a) O número de quadrados é $2(2+4+6+8+10) = 2 \cdot 30 = 60$. Como cada tetraminó cobre exatamente 4 quadrados, seriam necessários $\frac{60}{4} = 15$ tetraminós.

b) O tetraminó reto cobre 4 quadrados com números consecutivos e a soma dos números é $x + (x+1) + (x+2) + (x+3) = 4x + 6 = 4(x+1) + 2$.

Já o Z-tetraminó tem as possibilidades mostradas a seguir.



Nas duas primeiras, temos $x + x + (x+1) + (x+1) = 4x + 2$. Já nas duas últimas, temos $x + (x+1) + (x+2) + (x+3) = 4x + 6 = 4(x+1) + 2$.

c) Cada número ímpar de 1 a 11 aparece 5 vezes e cada par de 2 a 10 aparece 6 vezes. Portanto a soma é

$$5(1+3+5+7+9+11) + 6(2+4+6+8+10) = 5 \cdot 36 + 6 \cdot 30 = 360 = 4 \cdot 90$$

que é um múltiplo de 4.

Outra solução. Para cada x de 1 a 5 temos a mesma quantidade de x e $12 - x$. Se agruparmos essas parcelas teremos várias parcelas 12. Além disso, temos 6 vezes o número 6 e a soma deles é $6 \cdot 6 = 36 = 12 \cdot 3$. Portanto, a soma resulta num múltiplo de 12. Como $12 = 4 \cdot 3$, a soma é também um múltiplo de 4.

d) Ao somarmos k números que deixam resto 2 na divisão por 4 temos

$$4x_1 + 2 + \cdots + 4x_k + 2 = 4(x_1 + \cdots + x_k) + 2k$$

Se k é par, então $2k = 2 \cdot 2t = 4t$ e temos um múltiplo de 4. Se k é ímpar, então $2k = 2 \cdot (2t+1) = 4t + 2$ deixa resto 2 na divisão por 4. Para que a soma dos números cobertos pelas peças fosse igual à soma de todos os quadrados, todo a quantidade k de peças teria que ser par, já que cada uma tem soma $4x + 2$ e a soma total é um múltiplo de 4.

e) Pelo item d, a quantidade de peças deveria ser par. Pelo item a, essa quantidade de peças teria que ser 15 que é ímpar. Portanto, tal cobertura é impossível.

Critérios

Item a: 0,4 ponto

Obter o número de quadrados corretamente...0,2 ponto

Obter o número de tetraminós corretamente...0,2 ponto

Item b: 1 ponto

Justificar usando variáveis inteiras que cada um dos teraminós retos tem soma da forma $4x + 2$..0,1 ponto cada

Justificar usando variáveis inteiras que cada um dos Z-teraminós tem soma da forma $4x + 2$..0,2 ponto cada

(A afirmação que os tetraminós verticais são análogos aos horizontais será aceita e ela, por si só, vale 0,5 pontos cumulativos com os 0,1 de cada tetraminó reto e 0,2 de cada Z-tetraminó (horizontal ou vertical) um ao outro restante. Não afirmar nenhuma vez que $4x + 6$ deixa resto 2 na divisão por 4 é passível de punição por 0,1 ponto neste item)

Item c: 0,7 ponto

Primeiro critério:

Dividir a soma em diagonais...0,2 ponto

Achar que há 5 números em diagonais ímpares e 6 em diagonais pares........................0,2 ponto

Obter a soma total de 360..0,2 ponto

Constatar que esse valor é múltiplo de 4...0,1 ponto

Segundo critério:

Parear os números x com $12 - x$ com $x \neq 6$ e mostrar que estão em números iguais..0,2 ponto

Obter que a soma dos números diferentes de 6 é múltiplo de 4...................................0,2 ponto

Obter que a soma dos múltiplos de 6 é 36...0,2 ponto

Concluir que a soma total é múltipla de 4...0,1 ponto

Item d: 0,4 ponto

Afirmar que o resto da soma de k valores congruentes a dois módulo 4 é o mesmo que $2k$ módulo 4...0,2 ponto

Concluir que se o número de tetraminós for ímpar, a soma dos valores seria congruente a 2 módulo 4...0,2 ponto

Item e:

Explicar que, pelo item d, o número de tetraminós é par..0,2 ponto

Explicar que, pelo item a, o número de tetraminós é ímpar...0,2 ponto

Concluir que a cobertura é impossível...0,1 ponto

PROBLEMA 5 – Valor: 4 pontos

a) Podemos pegar a tabela dada da divisão de 7 bolinhos para 4 pessoas trocar linhas por colunas e trocar os denominadores 12 por 21. Veja a tabela a seguir.

					Total
	$\frac{7}{21}$	$\frac{5}{21}$			$\frac{12}{21}$
	$\frac{7}{21}$	$\frac{5}{21}$			$\frac{12}{21}$
	$\frac{7}{21}$	$\frac{5}{21}$			$\frac{12}{21}$
			$\frac{7}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{12}{21}$
			$\frac{7}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{12}{21}$
			$\frac{7}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{12}{21}$
		$\frac{6}{21}$		$\frac{6}{21}$	$\frac{12}{21}$
Total	1	1	1	1	

b) Pelo item anterior conseguimos uma divisão com menor fração $\frac{5}{21}$. Suponha que seja possível dividir 4 bolinhas para 7 pessoas usando menor fração $\frac{p}{q}$ maior que $\frac{5}{21}$. Multiplique todas as frações por $\frac{7}{4}$ todas as frações dos bolinhos. As frações dos bolinhos agora soma $1 \cdot \frac{7}{4} = \frac{7}{4}$ e a soma dos pedaços das pessoas passa a ser $\frac{4}{7} \cdot \frac{7}{4} = 1$. Trocando as linhas por colunas temos uma forma de distribuir 7 bolinhos para 4 pessoas em que a menor fração satisfaz $\frac{p}{q} \cdot \frac{7}{4} > \frac{5}{21} \cdot \frac{7}{4} = \frac{5}{12}$. Mas isso contradiz a informação do enunciado de que não é possível obter menor parte maior $\frac{5}{12}$.

c) Tome um bolinho que é cortado em três ou mais partes. Se cada parte fosse maior que $\frac{1}{3}$, então esse bolinho seria maior que $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$ bolinho. Portanto, se algum bolinho for cortado em mais de dois pedaços, um desses pedaços é menor ou igual a $\frac{1}{3}$ de bolinho.

d) Se um bolinho não é cortado, então a pessoa que recebê-lo receberá mais um ou mais pedaços com soma $\frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$ de bolinho. Portanto, algum pedaço seria no máximo $\frac{1}{3}$ de bolinho.

e) Se uma pessoa receber 4 pedaços e cada pedaço for maior que $\frac{1}{3}$ de bolinho, então ela receberia mais que $4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ de bolinho que é maior que a quantidade que cada um deve receber. Se uma pessoa receber 4 pedaços, então algum pedaço seria no máximo $\frac{1}{3}$ de bolinho. Se ninguém receber 4 pedaços, então são $4 \cdot 2 = 8$ pedaços para 3 pessoas e uma pessoa receberá 2 pedaços e duas pessoas recebrão 3 pedaços.

f) A pessoa que recebe 2 pessoas deve ter no total $\frac{4}{3}$ de bolinho. O maior dos 2 pedaços é pelo menos metade do que total, então algum pedaço é pelo menos $\frac{2}{3}$ de bolinho. Olhe para o bolinho de onde saiu esse pedaço maior, o outro pedaço desse bolinho é no máximo $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ de bolinho.

Critérios

Item a: 0,6 ponto

Desenhar uma tabela que satisfaça o exigido..0,6 ponto

(A explicação de que se pode trocar linhas por colunas e trocar os denominadores 12 por 21 vale 0,3 ponto e cada uma dessas observações individualmente vale 0,2 ponto. Isto é, um aluno que não desenhou uma tabela completa pode ganhar, no máximo, 0,6 ponto)

Item b: 0,9 ponto

Notar que ao trocar linhas e colunas obtém-se uma tabela das mesmas dimensões que a do caso anterior..0,3 ponto

Notar que a transformação acima composta com multiplicar as frações por $\frac{7}{4}$ transforma nossa tabela em uma tabela válida para o caso anterior...0,3 ponto

Concluir o item com um argumento por absurdo...0,3 ponto

Item c: 0,5 ponto

Supor que o bolo é cortado em ao menos 3 pedaços maiores do que um terço do bolinho...0,2 ponto

Efetuar a conta e obter um absurdo...0,3 ponto

Item d: 0,5 ponto

Considerar a pessoa que recebeu o bolinho não cortado...0,3 ponto

Argumentar que essa pessoa receberá um pedaço menor ou igual a $\frac{1}{3}$ de bolinho........0,2 ponto

Item e: 0,7 ponto

Argumentar que ninguém pode receber 4 pedaços ou mais..0,4 ponto

Argumentar que a única maneira de realizar a divisão é $2+3+3$...............................0,3 ponto

Item f: 0,8 ponto

Considerar os tamanhos dos pedaços da pessoa que recebeu dois pedaços.................0,1 ponto

Argumentar que essa pessoa recebeu ao menos um pedaço maior ou igual a $\frac{2}{3}$...........0,3 ponto

Considerar o bolinho de onde veio tal pedaço..0,1 ponto

Concluir que desse bolinho foi partido um pedaço menor ou igual a $\frac{1}{3}$..........................0,3 ponto

PROBLEMA 6 – Valor: 4 pontos

Solução.

a) Como $EBCI$ é quadrado $EI = a$. Como $FGHI$ é quadrado, $GI = FG = b$. Portanto, como T_2 é congruente a ABC, $DG = a$ (visto que DF é c, como indicado na figura e FG é b). Por fim, $DE = b$, pois T_1 é congruente a ABC. Logo, $EI = DG = a$ e $GI = DE = b$.Note que $ACIH$ é um paralelogramo, pois AH e CI são perpendiculares a BC e, portanto, paralelas, enquanto HI é paralela (pelo quadrado) a FG e FD e AB são paralelas (pelo quadrado), mas como pela congruência de ABC e T_2, os ângulos que AC faz com AB e FG com FD são os mesmos, AC é paralela a FG, que é paralela a AI. Pela mesma congruência entre ABC e T_2, DG é paralela a BC, mas BC é paralelo a EI pelo quadrado, logo DG e EI são paralelos. Como T_1 e T_3 são congruentes e possuem um lado respectivo paralelo ($FA//DB$ pelo quadrado), temos que DE é paralela a FH, o qual é paralelo a GI pelo quadrado. Assim, $DEIG$ também é paralelogramo. Para terminar a congruência, note que $\angle ACI = 90° - \gamma$. Como $\angle HIG = \angle EIC = 90°$ e, pelo paralelogramo $\angle HIC = 90° + \gamma$, $\angle EIG = 90 - \gamma$ e os paralelogramos são congruentes.

b) Note que $[BEPFA] + [T_1] = [BDEPFA]$ e $[T_2] = [DEPF] + [DEPG]$, como $[BEPFA] + [T_1] + [T_2] - [DEPG] = [BDEPFA] + [DEPF] = [BDFA] = Q(c)$, temos o desejado (todas as igualdades de área vem de tomar a união disjunta das figuras como soma de áreas, exceto a última que é a fórmula da área do quadrado)

c) Note que $[DEPG] + [GPI] = [DEIG] = [CAHI]$, sendo a primeira igualdade devido a união das figuras e a segunda pelo item a.

d) Note que $Q(a) = [ICBE]$ e $Q(b) = [FGIH]$, logo $Q(a) + Q(b) = [ICBE] + [FGIH] = [BEPFHIC] + [GPI]$, por união de figuras. Note que $[BEPFHIC] = [T] + [BEPFA] + [T_3] + [CAHI]$, logo $Q(a) + Q(b) = [T] + [BEPFA] + [T_3] + [CAHI] + [GPI]$.

e) Note que $a^2 + b^2 = Q(a) + Q(b) = [T] + [BEPFA] + [T_3] + [CAHI] - [GPI] = [BEPFA] + [T_1] + [T_2] - [DEPG] + [DEPG] + [CAHI] - [GPI]$, por conta das igualdades já vistas e pois triângulos congruentes possuem áreas iguais. Como $[BEPFA] + [T_1] + [T_2] - [DEPG] = Q(c) = c^2$ e $[GPI] = [CAHI] - [DEPG]$, temos que $a^2 + b^2 = c^2 + 2[CAHI] = c^2 + 2ah$ (a última igualdade é pela dica do problema). Portanto, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ah$

Critérios

Item a: 1,0 ponto

Mostrar que $EI = DG = a$ e $DE = GI = b$ .... 0,5 ponto

Mostrar que $m(G\hat{I}E) = m(A\hat{C}I)$ ou qualquer outro par de ângulos correspondentes dos dois quadriláteros +0,5 ponto

Item b: 0,5 ponto

Esse item não tem pontuação parcial. Soluções completas recebem 0,5 ponto e qualquer outra coisa recebe 0,0 ponto.

Item c: 0,5 ponto

Esse item não tem pontuação parcial. Soluções completas recebem 0,5 ponto e qualquer outra coisa recebe 0,0 ponto.

Item d: 1,0 ponto

Observar que a área da união dos quadrados de lados a e b é igual a $[BEPFA] + [T_3] + [T] + [CAHI]$ 0,5 ponto

Concluir, somando $[GPI] = [CAHI] - [DEPG]$ .... +0,5 ponto

Item e: 1,0 ponto

Substituir $Q(c)$ em $Q(a) + Q(b)$ ou vice-versa .... 0,5 ponto

Concluir .... +0,5 ponto

PROBLEMA 7 – Valor: 6 pontos

Solução.

a) A tabela a seguir resume os resultados:

Cadeia	Caminho de estados	Estado final	Aceita?
1100	$0 \to 1 \to 3 \to 2 \to 0$	0	Sim
1001	$0 \to 1 \to 2 \to 0 \to 1$	1	Não
10100	$0 \to 1 \to 2 \to 1 \to 2 \to 0$	0	Sim
10110	$0 \to 1 \to 2 \to 1 \to 3 \to 2$	2	Não
10000	$0 \to 1 \to 2 \to 0 \to 0 \to 0$	0	Sim

b) $(1001)_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 9$;

$(10100)_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 20$;

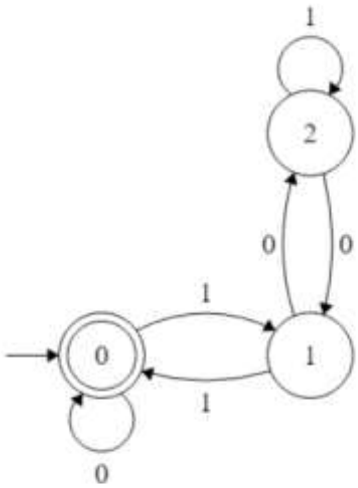
$(10110)_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 22$;

$(10000)_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 16$.

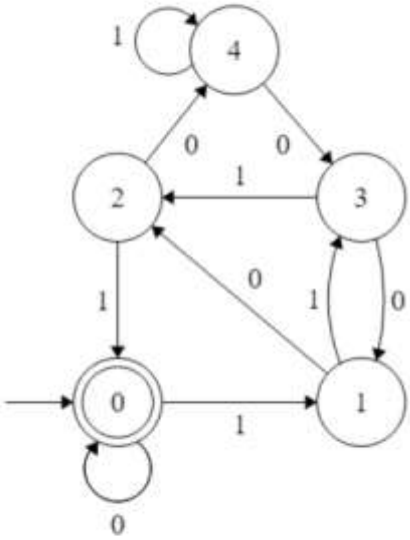
c) Novamente, resumimos os resultados na seguinte tabela:

Estado inicial	Leitura	Conta	Resto na divisão por 3 e estado final
0	0	$2 \cdot 3k + 0 = 6k$	0
0	1	$2 \cdot 3k + 1 = 6k + 1$	1
2	0	$2(3k + 2) + 0 = 3(2k + 1) + 1$	1
2	1	$2(3k + 2) + 1 = 3(2k + 1) + 2$	2

Com isso, podemos completar o autômato AF2:

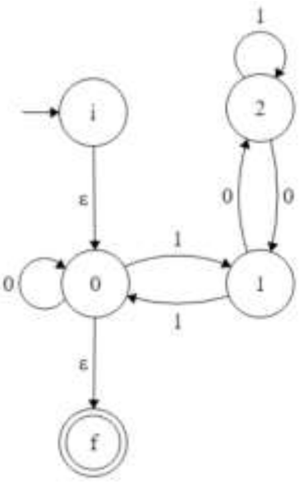


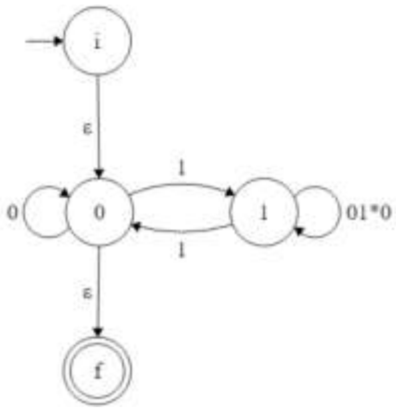
d) Usando uma lógica semelhante ao item c, chegamos ao autômato AF3:



e) Por exemplo, $R = (00 \cup 1)^*$. Para garantir que os blocos de zero tenham quantidades pares de zeros, basta inserir os zeros de dois em dois.

f) Adicionando i e f obtemos o autômato da esquerda.





Ao eliminar o estado 2, trocamos $1 \xrightarrow{0} 2 \xrightarrow{1} 2 \xrightarrow{0} 1$ por $1 \xrightarrow{01^*0} 1$, obtendo o autômato da direita.

g) Agora eliminamos o estado 1. Com isso, obtemos o autômato com o único estado intermediário 0, com um loop em $0 \cup (1(01^*0)^*1)$. Uma expressão regular que descreve as linguagens aceitas por AF2 é, então, $\left(0 \cup (1(01^*0)^*1)\right)^*$.

Critérios

Item a: 1,5 ponto

Cada cadeia .... 0,3 ponto

Item b: 1,2 ponto

Cada número... 0,3 ponto

Item c: 1,2 ponto

Nesse problema, deve-se traçar quatro flechinhas a mais na figura (duas saindo do nó 0 e duas saindo do nó 2).

Cada flechinha... 0,3 ponto

Item d: 0,6 ponto

Esse item não tem pontuação parcial. Soluções completas recebem 0,6 ponto e qualquer outra coisa recebe 0,0 ponto.

Item e: 0,5 ponto

Esse item não tem pontuação parcial. Soluções completas recebem 0,5 ponto e qualquer outra coisa recebe 0,0 ponto.

Item f: 0,5 ponto

Esse item não tem pontuação parcial. Soluções completas recebem 0,5 ponto e qualquer outra coisa recebe 0,0 ponto.

Item g: 0,5 ponto

Esse item não tem pontuação parcial. Soluções completas recebem 0,5 ponto e qualquer outra coisa recebe 0,0 ponto.

XLVIII OLIMPÍADA PAULISTA DE MATEMÁTICA
Fase Única (agosto de 2024)
Nível β (8º e 9º anos do Ensino Fundamental)

www.opm.mat.br

Gabaritos e Critérios

PROBLEMA 1 – Valor: 2 pontos
Usar solução e critérios do problema 1 do nível alfa

PROBLEMA 2 – Valor: 2 pontos
Solução.
a) Note que $E`D` = E`A`$. Logo, $D`E`A`$ é isósceles, o que garante $\angle E`D`A` = \angle E`A`D`$. Usando que a soma dos ângulos do triângulo mencionado é $180°$ e que $\angle D`E`A` = 108°$, temos que $\angle E`D`A` = 36°$. Analogamente, $\angle C`D`B` = 36°$. Portanto, visto que $E`D`C` = 108°$, temos que $\angle A`D`B` = 36°$. Note que $D`E`A`$ e $D`C`B`$ são congruentes por LAL. Consequentemente, $D`A` = D`B`$. Como $A`D`B`$ é isósceles, podemos utilizar que a soma dos ângulos internos é $180°$ para concluir que os ângulos restantes ($A`B`D` = B`A`D`$) valem $72°$. Logo, os ângulos são $36°, 72°$ e $72°$.

b) Sabemos que F está no círculo de centro A e raio AB. Isso significa que $AF = AB = 1$, essa última igualdade pela hipótese do problema. Pela construção $FD = 1$. Portanto, $AF = 1 = FD$.

c) Note que, pelo item anterior, DFA é isósceles. Desse modo, $\angle FAD = \angle ADF = x$. Pelo teorema do ângulo externo em DFA (ou usando a soma dos ângulos sendo $180°$ com o ângulo raso), temos que $\angle AFB = 2x$. Como $AB = AF$, temos que $\angle AFB = \angle ABF = 2x$. Por fim, pela soma dos ângulos de BFA, temos que $\angle BAF = 180° - 4x$.

Segunda solução para $\angle BAF$: Como D está na mediatriz de AB, temos que $2x = \angle DBA = \angle DAB$. Sabemos que $\angle DAF = x$, logo $\angle BAF = \angle BAD - \angle FAD = 2x - x = x$.

d) Comparando as duas expressões obtidas na primeira e segunda solução para o item anterior, temos $180° - 4x = x \rightarrow x = 36°$. Portanto, $2x = 72°$ e os ângulos de ABD valem $36°, 72°, 72°$ como queríamos demonstrar.

e) Explicarei a construção do C e a construção do E é completamente análoga. Note que $CB = CD$, logo C está na mediatriz de BD que é construtível com régua e compasso pelo enunciado do item b. Note também que $\angle DBC = 36°$, mas os itens b,c e d mostram como construir um ângulo de $72°$ a partir de qualquer segmento (escolheremos BD) e obtemos uma reta BP tal que $\angle DBP = 72°$. Sabemos também construir uma bissetriz com régua e compasso para achar a bissetriz de $\angle DBP$ e, logo obter uma reta que contém todos os pontos X com $DBX = 36°$. Como B não pertence a mediatriz de BD, mas pertence a bissetriz de $\angle DBP$, as duas retas desenhadas são distintas, portanto como intersectam-se em C, C é a única interseção procurada.

Critérios

Item a: 0,5 pontos

Provar que $D`E`A`$ é isóceles..0,1 ponto

Achar $E`D`A` = 36°$..0,1 ponto

Achar $\angle A'D'B'$...0,1 ponto

Argumentar que $D`A` = D`B`$...0,1 ponto

Concluir o item e achar os ângulos restantes...0,1 ponto

Item b: 0,3 ponto

Notar que $AF = AB$...0,1 ponto

Notar que $AB = FD$...0,1 ponto

Concluir que $AF = FD$..0,1 ponto

Item c: 0,4 ponto

Achar cada ângulo em função de x..0,1 ponto cada

(Note que há infinitas soluções visto que sabemos $x = 36°$ e, ao menos, duas soluções naturais. O mais importante é que o aluno justifique adequadamente uma expressão válida)

Item d: 0,3 ponto

Achar uma expressão diferente da expressão anterior para $\angle B\hat{A}F$................................0,1 ponto

Resolver a equação e mostrar que os ângulos são os desejados....................................0,2 ponto

Item e:0,5 ponto

Afirmar que a mediatriz de BD é construtível com régua e compasso..........................0,2 ponto

Notar que podemos construir uma reta com ângulo 72° a partir de um segmento dado..0,1 ponto

Afirmar que a bissetriz de tal ângulo é construtível com régua e compasso...................0,1 ponto

Justificar que os lugares geométricos intersectam apenas no ponto desejado e concluir o problema...0,1 ponto

(Caso o aluno considere a intersecção de outros dois lugares geométricos diferente, vale 0,2 ponto explicar que C está em tal ponto geométrico e que é construtível com régua e compasso. Vale 0,1 ponto mostrar que os lugares geométricos intersectam apenas no ponto desejado)

PROBLEMA 3 – Valor: 3 pontos
Solução.

a) As cpps de 4 são (4), $(3;1)$, $(1;3)$, $(2;2)$, $(1;2;1)$ e $(1;1;1;1)$.

b) Temos:

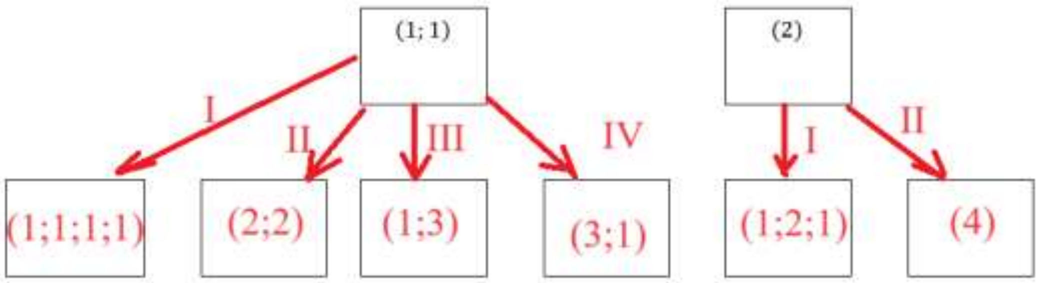
A: $(1;2;1)$ e $(1;1;1;1)$ - $A_4 = 2$

B: (4) e $(2;2)$ - $B_4 = 2$

C: $(1;3)$ – $C_4 = 1$

D: $(3;1)$ – $D_4 = 1$

c) A seguir temos a figura completa.



d) Para cpp de n, se aplicarmos a operação I teremos uma cpp de $n+2$ da classe A. E se pegarmos qualquer cpp de $n+2$ da classe A e retirarmos o 1 do começo e o 1 do final teremos uma cpp de n que pode ser de qualquer classe. Portanto, $P_n = A_{n+2}$.

Para cpp de n, se aplicarmos a operação II teremos uma cpp de $n+2$ da classe B. E se pegarmos qualquer cpp de $n+2$ da classe B e diminuirmos 1 do primeiro e do último termo teremos uma cpp de n que pode ser de qualquer classe. Portanto, $P_n = B_{n+2}$.

e) Uma cpp de $n+2$ da classe C a uma cpp de n da classe C com a operação III ou uma cpp de n da classe A também com a operação III. Como essas operações são reversíveis temos $C_{n+2} = C_n + A_n$.

Para D_{n+2} podemos usar a mesma ideia com a operação IV. Assim, $D_{n+2} = D_n + A_n$.

e) Veja que

$$P_{n+2} = A_{n+2} + B_{n+2} + C_{n+2} + D_{n+2} = P_n + P_n + (C_n + A_n) + (D_n + A_n)$$

Como $A_n = B_n$, podemos substituir um dos A_n por B_n e chegar em

$$P_{n+2} = 3 \cdot P_n$$

Logo,

$$P_{2024} = 3 \cdot P_{2022} = 3 \cdot 3 \cdot P_{2020} = \cdots = 3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot P_2 = 3^{1011} \cdot 2$$

Observação: a sequência dos $a_k = P_{2k}$ *é uma PG de razão* 3 *e poderíamos usar o termo geral da PG* $P_{2024} = a_{1012} = 3^{1011} \cdot a_1 = 3^{1011} \cdot P_2 = 3^{1011} \cdot 2$.

Critérios

Item a: 0,4 ponto

Achar todas as cpps...0,4 ponto

(O aluno perde 0,1 ponto para cada cpp que ele esquecer de incluir.)

Item b: 0,4 ponto

Classificar todas as cpps nas categorias certas...0,4 ponto

(O aluno perde 0,1 ponto para cada cpp classificada na categoria errada.)

Item c: 0,6 ponto

Cada flecha com o início correto e o número da operação correta................................0,6 ponto

Item d: 0,4 ponto

Mostrar que I é uma injeção de cpps de n na classe A de cpps $n + 2$............................0,1 ponto

Mostrar que podemos reverter essa operação (que é sobrejetora)................................0,1 ponto

Mostrar que II é uma injenção de cpps de n nna classe B de cpps $n + 2$.......................0,1 ponto

Mostrar que podemos reverter essa operação (que é sobrejetora)................................0,1 ponto

Item e: 0,6 ponto

Afirmar que $C_{n+2} = C_n + A_n$..0,1 ponto

Mostrar que a operação III é uma injeção das classes C e A dos cpps de n para a classe C das cpps de $n + 2$...0,1 ponto

Mostrar que podemos reverter essa operação (que é sobrejetora)................................0,1 ponto

(Os outros 0,3 ponto são distribuídos para as afirmações equivalentes para D. Caso o aluno explique que os casos são análogos, cada item acima vale o dobro dos pontos).

Item f: 0,6 ponto

Obter uma expressão para P_{n+2} e apenas valores de índice n......................................0,2 ponto

Mostrar que $P_{n+2} = 3P_n$..0,2 ponto

Achar uma expressão para P_{2024}..0,2 ponto

PROBLEMA 4 – Valor: 3 pontos

Solução.

a) Como há 4 retângulos na figura, $mdc(12,8) = 4$. Como o retângulo de base AB que passa por E possui base 12 e altura 2, ele possui área 24. Assim $mmc(12,8) = 24$.

b) Note que se colocarmos 4 retângulos com lados nas retas AD e BC e os outros lados paralelos a AB passando por A, E, F, G e C, cobrimos a figura toda. Note que 4 é o número de pontos na diagonal menos 1 (isto é o número de retângulos), logo $mdc(12,8)$. A área de cada retângulo é o $mmc(12,8)$. Assim, a área total é $mdc(12,8) \cdot mmc(12,8) = 12 \cdot 8$ por uma contagem dupla.

c) Note que os retângulos possuem como pontos inferiores à esquerda na diagonal $(a_0 j, b_0 j)$ com j entre 0 e $k - 1$. Em particular, $a = a_0 k$ e $b = b_0 k$. Portanto, como a_0 e b_0 são inteiros k divide a e b. Se há $k' > k$ divisor comum de a e b, tome $a_0` = \frac{a}{k`}$ e $b_0` = \frac{b}{k`}$, podemos construir retângulos com vértices opostos nas diagonais sendo $(a_0`j, b_0`j)$ e $(a_0`(j+1), b_0`(j+1))$ (eles estão na diagonal já que $(a_0`j, b_0`j) = \frac{j}{k`}(a, b)$ e são obviamente inteiros). Em particular $(a_0`, b_0`)$ está entre $A_1 = (0,0)$ e $A_2 = (a_0, b_0)$, já que $\frac{a}{k} > \frac{a}{k`}$ e $\frac{b}{k} > \frac{b}{k`}$, o que é uma contradição.

d) Note que $as = br \rightarrow \frac{as}{b} = r$. Portanto, $(r, s) = \frac{s}{b}(a, b)$, o que implica que (r, s) é um ponto na diagonal.

e) Note que podemos transladar V por $a_0 j$ com j entre 0 e $k - 1$ de tal maneira a cobrir todos o retângulo $ABCD$ (de fato isso garante que os lados verticais do retângulo passem por pontos consecutivos na diagonal (como fica claro pela expressão de tais pontos nas diagonais em c e pelo fato desse retângulo ter o primeiro ponto da diagonal não trivial no seu lado direito). Assim, temos que k vezes a área de V é a área de ABCD. Sabemos que a área de $ABCD$ é ab, mas também é k vezes a área de V. Como $k = mdc(a, b)$ e a área de V é $mmc(a, b)$, temos que $ab = mdc(a, b)mmc(a, b)$, como desejado.

Critérios

Item a: 0,4 ponto

Achar o $mdc(12,8)$..0,2 ponto

Achar o $mmc(12,8)$..0,2 ponto

(O problema permite ao aluno usar a descrição geométrica desses valores, pois as provas serão conduzidas nos próximos itens. O problema não proíbe o uso de técnicas puramente aritméticas para achar tais valores, o que deve ser considerado integralmente)

Item b: 0,7 ponto

Considerar translações do retângulo de área 24 horizontais ou verticais que cobrem todo o retângulo...0,3 ponto

Explicar que o retângulo de área 24 possui área $mmc(12,8)$......................................0,1 ponto

Explicar que o número de retângulos transladados é $mdc(12,8)$.................................0,1 ponto

Concluir comparando áreas o resultado pedido..0,2 ponto

Item c: 0,7 pontos

Explicar que $a_0 k = a$..0,2 ponto

Concluir que k divide a e b..0,1 ponto

Explicar que se o mdc fosse maior que k, teríamos primeiro ponto na diagonal sendo $(\frac{a}{mdc}, \frac{b}{mdc})$..0,2 ponto

Obter um absurdo e concluir que $k = mdc$..0,2 ponto

Item d: 0,5 ponto

Notar que $as = br$..0,2 ponto

Concluir que $(r, s) = \frac{s}{b}(a, b) = \frac{r}{a}(a, b)$..0,2 ponto

Concluir (r, s) está na diagonal..0,1 ponto

Item e:0,7 ponto

Considerar translações do retângulo de área mínima...0,2 ponto

Explicar por que essas translações cobrem o retângulo sem sobreposições..................0,3 ponto

Concluir por comparação de áreas a fórmula desejada...0,2 ponto

PROBLEMA 5 – Valor: 4 pontos
Solução.
a) Como o triângulo ABC é equilátero, AQ é altura e $\angle AQC = 90°$. Dessa forma, $\angle AQC + \angle CRA = 90° + 90° = 180°$ e o quadrilátero $AQCR$ é cíclico.

b) Como o quadrilátero $AQCR$ é cíclico, $\angle ARQ = \angle ACQ = \angle ACB = 60°$. Além disso, QM é base média do trapézio $PRCB$ e $QM \perp PR$. No triângulo PQR a altura e a mediana relativas a PR coincidem, os lados QR e QP possuem mesma medida e $\angle QPR = \angle QRP = \angle QRA = 60°$.

c) O triângulo equilátero PQR tem lado ℓ e altura $MQ = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$. Veja que $AM = AP + PM = k + \frac{\ell}{2}$.

d) Usando o Teorema de Pitágoras no triângulo AMQ temos

$$AQ^2 = AM^2 + MQ^2 = \left(k + \frac{\ell}{2}\right)^2 + \left(\frac{\ell\sqrt{3}}{2}\right)^2 = k^2 + 2k\frac{\ell}{2} + \frac{\ell^2}{4} + \frac{3\ell^2}{4} = k^2 + k\ell + \ell^2$$

Para chegar no formato dado, veja que

$$m^2 = (k+\ell)^2 = k^2 + 2k\ell + \ell^2 \Rightarrow k^2 + \ell^2 + m^2 = 2(k^2 + k\ell + \ell^2)$$
$$\Rightarrow AQ^2 = \frac{k^2 + \ell^2 + m^2}{2}$$

e) Como AQ é altura do triângulo equilátero ABC temos

$$AQ = \frac{(lado\ de\ ABC)\sqrt{3}}{2} \Rightarrow lado\ de\ ABC = AQ \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{k^2 + \ell^2 + m^2}{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}$$
$$\Rightarrow lado\ de\ ABC = \sqrt{\frac{2(k^2 + \ell^2 + m^2)}{3}}.$$

Critérios

Item a: 0,7 pontos

Explicar que Q é pé da altura de A..0,4 ponto

Concluir por soma dos ângulos opostos que o quadrilátero é cíclico.............................0,3 ponto

Item b: 1 ponto

Explicar que $\angle QRM = 60°$..0,3 ponto

Explicar que QM é paralelo as retas iniciais..0,4 ponto

Concluir a conta de que $\angle RQP$ ou $\angle QPR = 60°$..0,3 ponto

Item c: 0,6 ponto

Explicar que a altura do triângulo equilátero de lado l é $\frac{\sqrt{3}}{2}l$ e achar MQ......................0,3 ponto

Achar AM...0,3 ponto

Item d: 0,9 ponto

Usar Pitágoras em AMQ..0,4 ponto

Achar AQ em função de k e l..0,3 ponto

Obter a expressão desejada para AQ...0,2 ponto

Item e: 0,8 ponto

Lembrar que AQ é altura do triângulo ABC..0,3 ponto

Aplicar fórmula da altura do triângulo equilátero...0,3 ponto

Achar a fórmula do lado de ABC...0,3 ponto

PROBLEMA 6 – Valor: 4 pontos

Solução.

a) $1 = (3-4\epsilon)(x+y\epsilon) = 3x + (3y-4x)\epsilon - 4y\epsilon^2 = 3x + (3y-4x)\epsilon$, portanto

$3x = 1 \to x = \frac{1}{3}$ e $3y - 4x = 0 \to y = \frac{4}{9}$.

b) $(a+b\epsilon)^2 = a^2 + 2ab\epsilon + b^2\epsilon^2 = a^2 + 2ab\epsilon$, por produtos notáveis.

c) $(a_{n-1}+c_{n-1}\epsilon)(a_{n+1}+c_{n+1}\epsilon) = (a_n + c_n\epsilon)^2 - 1 = a_n^2 + 2a_nc_n\epsilon - 1$, por conta do item anterior. Sabemos que $(a_{n-1}+c_{n-1}\epsilon)(a_{n+1}+c_{n+1}\epsilon) = a_{n-1}a_{n+1} + (a_{n-1}c_{n+1} + a_{n+1}c_{n-1})$. Comparando as partes de ϵ, temos que $a_{n-1}c_{n+1} + a_{n+1}c_{n-1} = 2a_nc_n$. Trocando a_j por j, temos $(n-1)c_{n+1} = 2nc_n - (n+1)c_{n-1}$.

d) $c_{n-1} = \frac{(n-2)(n-1)n}{6}$ e $c_{n+1} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$. Note que

$$\begin{aligned}(n-1)c_{n+1} &= \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{6} = \frac{(n-1)n(n^2+3n+2)}{6} = \frac{(n-1)n(2n^2+2n-n^2+n+2)}{6} \\ &= \frac{(n-1)n(2n^2+2n)}{6} - \frac{(n-1)n(n^2-n-2)}{6} = 2n\frac{(n-1)n(n+1)}{6} - (n+1)\frac{(n-2)(n-1)n}{6} \\ &= 2nc_n - (n+1)c_{n-1},\end{aligned}$$

como desejávamos mostrar

Critérios

Item a: 1,5 ponto

Obter o sistema $\begin{cases} 3x = 1 \\ -4x + 3y = 0 \end{cases}$ .... 1,0 ponto

Resolver o sistema e concluir .... +0,5 ponto

Item b: 1,0 ponto

Fazer $(a+b\epsilon)^2 = (a+b\epsilon)(a+b\epsilon)$ ou desenvolver o produto notável $(a+b\epsilon)^2 = a^2 + 2ab\epsilon + (b\epsilon)^2$ 0,5 ponto

Concluir .... +0,5 ponto

Item c: 1,0 ponto

Fazer a substituição .... 0,5 ponto

Concluir .... +0,5 ponto

Item d: 0,5 ponto

Esse item não tem pontuação parcial. Soluções completas recebem 0,5 ponto e qualquer outra coisa recebe 0,0 ponto.

PROBLEMA 7 – Valor: 6 pontos

Solução.

a) Há exatamente seis possibilidades (e somente essas). Qualquer uma delas serve como resposta e nenhuma outra pode ser uma resposta.

Número	1	2	3	4	5	6	7	8
Possibilidade 1	A	A	B	B	A	A	B	B
Possibilidade 2	B	B	A	A	B	B	A	A
Possibilidade 3	A	B	B	A	A	B	B	A
Possibilidade 4	B	A	A	B	B	A	A	B
Possibilidade 5	A	B	A	B	B	A	B	A
Possibilidade 6	B	A	B	A	A	B	A	B

b) Considere quaisquer $r+1$ números consecutivos. Como há r cores, pelo menos dois números, a e $a+d$ têm a mesma cor. Com isso, $\{a, a+d\}$ é cor-focado com o único foco $a+2d$.

c) Cada número pode ser pintado de r maneiras. Sendo $2m$ números, há r^{2m} maneiras de colorir $2m$ números consecutivos com r cores.

d) Há $\frac{N}{2m} = r^{2m} + 1$ blocos, que é mais do que a quantidade de maneiras de pintar seus elementos com r cores. Assim, há pelo menos dois blocos com exatamente as mesmas $2m$ pinturas, na mesma ordem.

e) *Mesmo foco*: primeiro note que o foco dos primeiros $s - 1$ pares é $a_i + 2(d_i + d) = a_i + 2d_i + 2d = f + 2d$, que coincidem entre si e com o foco de $\{f, f + d\}$.

Monocromáticos: sabemos a_i e $a_i + d_i$, ambos de I', têm a mesma cor. Somar d a $a_i + d_i$ gera um elemento de J, que tem a mesma cor. Com isso, a_i e $a_i + d_i + d$ têm a mesma cor. Quanto ao último par, veja que $a_i + d_i \in I'$, e $d_i < m$, pois $a_i \in I'$ também. Logo $f = a_i + 2d_i < a_i + d_i + m \in I$ e, consequentemente, $f + d \in J$ tem a mesma cor que f.

Cores diferentes: como os $\{a_i, a_i + d_i\}$ formam pares cor-focados, suas $s - 1$ cores são diferentes. Se f tem a mesma cor que uma das $s - 1$ cores do pares cor-focados, digamos, de $\{a_k, a_k + d_k\}$, sendo $f = a_k + 2d_k$ um foco teríamos que $a_k, a_k + d_k, a_k + 2d_k$ formariam uma 3-PA monocromática em I, o que é uma contradição.

f) Se temos r pares cor-focados, temos pares de todas as r cores com o mesmo foco. Esse foco tem uma das r cores e forma uma 3-PA monocromática.

Critérios

Item a: 1,0 ponto

As únicas possibilidades são:

Número	1	2	3	4	5	6	7	8
Possibilidade 1	A	A	B	B	A	A	B	B
Possibilidade 2	B	B	A	A	B	B	A	A
Possibilidade 3	A	B	B	A	A	B	B	A
Possibilidade 4	B	A	A	B	B	A	A	B
Possibilidade 5	A	B	A	B	B	A	B	A
Possibilidade 6	B	A	B	A	A	B	A	B

Apresentar qualquer uma delas vale 1,0 ponto; qualquer outra coisa vale 0,0 ponto.

Item b: 1,0 ponto

Esse item não tem pontuação parcial. Soluções completas recebem 1,0 ponto e qualquer outra coisa recebe 0,0 ponto.

Item c: 1,0 ponto

Aplicar o princípio multiplicativo .... 0,5 ponto

Concluir .... +0,5 ponto

Item d: 0,5 ponto

Esse item não tem pontuação parcial. Soluções completas recebem 0,5 ponto e qualquer outra coisa recebe 0,0 ponto.

Item e: 1,5 ponto

Mostrar que é monocromático .... 0,5 ponto

Mostrar que as s cores são distintas (ou seja, que a cor de $\{f, f + d\}$ é diferente das cores dos demais pares) +0,5 ponto

Mostrar que todos os pares possuem o mesmo foco .... +0,5 ponto

Item f: 1,0 ponto

Observar que todas as cores estão presentes .... 0,5 ponto

Concluir .... +0,5 ponto

Gabaritos e Critérios

PROBLEMA 1 – Valor: 2 pontos

Solução.

a) O ângulo $A\hat{I}B$ está subtende um lado do eneágono e tem medida $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}\cdot 2\pi = \frac{\pi}{9}$. Observe que $IB = y$, pois separa 2 lados do eneágono. Como o triângulo é isósceles ($AI = AB = x$ lados) a altura AM corta IB no ponto médio. Assim, $\cos\frac{\pi}{9} = \frac{IM}{IA} = \frac{y/2}{x}$.

b) Observe o triângulo HAC, temos $A\hat{H}C = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{9}\cdot 2\pi = \frac{2\pi}{9}$ e $HC = w$, pois separa 4 lados do eneágono. O triângulo HAC é isósceles ($HA = AC = y$ separam 2 lados) e a altura AN corta HC no ponto médio. Dessa forma, $\cos\frac{2\pi}{9} = \frac{HN}{HA} = \frac{w/2}{y}$.

c) Observe o triângulo FAE, temos $A\hat{F}E = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}\cdot 2\pi = \frac{4\pi}{9}$ e $FE = x$, pois é lado. O triângulo FAE é isósceles ($FA = AE = w$ separam 4 lados) e a altura AP corta FE no ponto médio. Portanto, $\cos\frac{4\pi}{9} = \frac{FP}{HA} = \frac{x/2}{w}$.

d) Veja que $\cos\frac{3\pi}{9} = \cos\frac{\pi}{3} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$. Caso alguém não lembre desse valor, pode usar o triângulo equilátero GAD para obter $\cos\frac{3\pi}{9} = \frac{z/2}{z} = \frac{1}{2}$.

Usando as expressões obtidas nos itens anteriores $\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{3\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9} = \frac{y/2}{x}\cdot\frac{w/2}{y}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{x/2}{w} = \frac{1}{16}$

Critérios

Item a: 0,7 ponto

Considerar o triângulo AIB ou equivalente..0,2 ponto

Achar o ângulo $\angle AIB$ (ou análogo)...0,2 ponto

Considerar a altura do triângulo e provar que é a mediana..0,2 ponto

Achar uma expressão para $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$...0,1 ponto

Item b: 0,5 ponto

Considerar o triângulo HAC ou equivalente..0,2 ponto

Achar o ângulo $\angle AHC$ (ou análogo)..0,1 ponto

Considerar a altura do triângulo e provar que é a mediana..0,1 ponto

Achar uma expressão para $\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)$..0,1 ponto

Item c: 0,5 ponto

Considerar o triângulo AFE ou equivalente..0,2 ponto

Achar o ângulo $\angle AFE$ (ou análogo)..0,1 ponto

Considerar a altura do triângulo e provar que é a mediana..0,1 ponto

Achar uma expressão para $\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)$..0,1 ponto

Item d: 0,3 ponto

Calcular ou lembrar do valor de $\cos\left(\frac{3\pi}{9}\right)$..0,1 ponto

Substituir $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{9}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right)$ em função das variáveis do problema e achar $\frac{1}{16}$ ....0,2 ponto

PROBLEMA 2 – Valor: 2 pontos

Solução.

a) Temos $K_2 \cdot K_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$. Nem toda K-matriz é da forma K_n.

b) Temos $\det K_n = n \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1$.

c) Resposta: $b = 2$.

Fazendo as operações indicadas

$$\begin{bmatrix} 13 & b \\ b & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 13 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & b \\ b & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 13 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 52 + 13b & 13 + 4b \\ 4b + 13 & b + 4 \end{bmatrix}$$

O b precisa deixar resto 2 na divisão por 3 e ser o mais próximo de 13, então $b = 2$.

d) Resposta: $c = 4$.

Fazendo as operações indicadas

$$\begin{bmatrix} 13 & c \\ c & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 26 & 7 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & c \\ c & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 26 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 91 + 26c & 26 + 7c \\ 7c + 26 & 2c + 7 \end{bmatrix}$$

O c precisa deixar resto 1 na divisão por 3 e ser o mais próximo de 13, então $c = 4$.

e) Seguindo as instruções

$$M_2 = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 91 + 26c & 26 + 7c \\ 7c + 26 & 2c + 7 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 195 & 54 \\ 54 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 65 & 18 \\ 18 & 5 \end{bmatrix}$$

Por fim,

$$M_3 = \begin{bmatrix} 65 & 18 \\ 18 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 65 & 18 \\ 18 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2340 & 649 \\ 649 & 180 \end{bmatrix}$$

E a solução fundamental de $x^2 - 13y^2 = 1$ é $(x, y) = (649,180)$.

Critérios

Item a: 0,4 ponto

Obter a matriz $K_2 \cdot K_3$..0,2 ponto

Concluir que nem toda matriz K é da forma K_n..0,2 ponto

Item b: 0,2 ponto

Calcular o determinante corretamente..0,2 ponto

Item c: 0,6 ponto

Achar o produto círculo das matrizes..0,2 ponto

Concluir que $b \equiv 2 \ (mod\ 3)$..0,2 ponto

Achar que 2 é a resposta..0,2 ponto

Item d: 0,3 ponto

Achar o produto círculo das matrizes..0,1 ponto

Concluir que $c \equiv 1 \ (mod\ 3)$..0,1 ponto

Achar que 4 é a resposta..0,1 ponto

Item e: 0,5 ponto

Achar M_2...0,2 ponto

Achar M_3...0,2 ponto

Achar a solução fundamental...0,1 ponto

PROBLEMA 3 – Valor: 3 pontos

Solução.

a) Veja que

$$S - nS = 1 + n + n^2 + \cdots + n^{n-2} - (n-1)n^{n-1}$$

Usando a expressão fornecida

$$S(1-n) = \frac{n^{n-1}-1}{n-1} - (n-1)n^{n-1} \Leftrightarrow S = n^{n-1} - \frac{n^{n-1}-1}{(n-1)^2}$$

b) Note que $T = n(1 + n + \cdots + n^{n-2}) - S$. Usando a expressão dada no enunciado

$$T = n \cdot \frac{n^{n-1}-1}{n-1} - n^{n-1} + \frac{n^{n-1}-1}{(n-1)^2}$$

c) Para comparar os dois é melhor representa-los com o mesmo denominador:

$$S = \frac{n^{n-1}(n-1)^2 - n^{n-1} + 1}{(n-1)^2} = \frac{n^n(n-2)+1}{(n-1)^2}$$

$$T = \frac{n^{n-1}n(n-1) - n(n-1) - n^{n-1}(n-1)^2 + n^{n-1} - 1}{(n-1)^2} = \frac{n^n - (n^2-n+1)}{(n-1)^2}$$

Assim,

$$S - (n-2)T = \frac{n^n(n-2) + 1 - n^n(n-2) + (n-2)(n^2-n+1)}{(n-1)^2} = \frac{n^3 - 3n^2 + 3n - 1}{(n-1)^2}$$

Usando produtos notáveis $S - (n-2)T = \frac{(n-1)^3}{(n-1)^2} = n - 1$.

d) Pelo item anterior, $\frac{S}{T} = \frac{(n-2)T+(n-1)}{T} = n - 2 + \frac{n-1}{T}$ é, aproximadamente, $n-2$.

Para $n = 10$ temos $S = 1 + 20 + \cdots + 9 \cdot 10^8 = 987654321$ e $T = 9 + 80 + \cdots + 1 \cdot 10^8 = 123456789$. Portanto, $\frac{S}{T}$ é, aproximadamente, $10 - 2 = 8$.

e) Aplicando os resultados anteriores para $n = 100$.

$$\frac{9998 \ldots 0201}{0102 \ldots 9899} \approx 100 - 2 = 98$$

f) Já vimos que $\frac{S}{T} = n - 2 + \frac{n-1}{T}$, então para $n = 100$ temos $\frac{100-1}{T} = \frac{99}{T} = 0,\underbrace{00 \ldots 0}_{k \text{ zeros}}\, a \ldots$. Agora vamos para as aproximações $T = \frac{100^{100} - (100^2 - 100 + 1)}{(100-1)^2} \approx \frac{100^{100}}{100^2} = 100^{98}$.

Daí, $\frac{99}{T} \approx \frac{100}{100^{98}} = \frac{1}{100^{97}} = \frac{1}{10^{194}} = 0,\underbrace{00 \ldots 00}_{193\ zeros}1$ e podemos concluir que $k = 193$.

Critérios

Item a: 0,5 ponto

Considerar $S - nS$..0,2 ponto

Provar a expressão de S..0,3 ponto

Item b: 0,5 ponto

Notar que $T = n(1 + n + \cdots + n^{n-2}) - S$..0,2 ponto

Provar a expressão de T..0,3 ponto

(O primeiro critério não é rígido com a forma fatoradas, $n + n^2 + \cdots + n^{n-1} - S$, também deve ser aceito)

Item c: 0,5 ponto

Colocar S e T no mesmo denominador..0,1 ponto

(Atenção, isso pode ter sido feito no passo anterior)

Achar uma expressão para $S - (n-2)T$...0,2 ponto

Fatorar e cortar fatores comuns obtendo $n - 1$..0,2 ponto

Item d: 0,5 ponto

Obter que $n = 10$..0,2 ponto

Justificar que $\frac{S}{T}$ é aproximadamente $n - 2$...0,3 ponto

Item e: 0,4 ponto

Justificar que a expressão equivale a $\frac{S}{T}$ para $n = 100$..0,2 ponto

Achar que o valor desejado é aproximadamente 98...0,2 ponto

Item f: 0,6 ponto

Achar o termo de erro da fórmula de $\frac{S}{T}$..0,2 ponto

Aproximar o valor de T para $100^{98} (= 10^{196})$..0,2 ponto

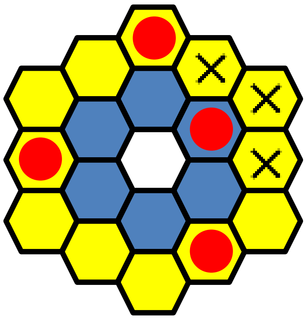
Concluir com o valor de k...0,2 ponto

PROBLEMA 4 – Valor: 3 pontos

Solução.

a) Há 6 maneiras de escolher a casa do anel interno. Cada casa do anel interno bloqueia três casas consecutivas do anel externo, de modo que sobram 9 casas para escolher 3.

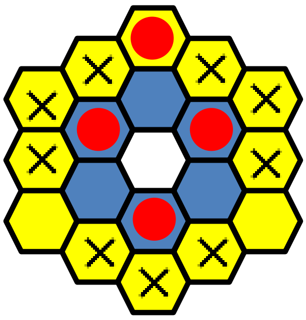
Para tanto, sejam x_1, y_2, y_3, x_4 as quantidades de casas vazias entre as casas escolhidas ou entre as casas escolhidas e as pontas da fileira de 9 casas, no sentido anti-horário. No que se segue, $x_1 = 0$, $y_1 = 2$, $y_2 = 3$ e $x_4 = 1$:



Como sobram $9 - 3 = 6$ casas vazias, temos $x_1 + y_2 + y_3 + x_4 = 6$; além disso, $y_2 \geq 1$ e $y_3 \geq 1$, de modo que fazemos $y_2 = x_2 + 1$ e $y_3 = x_3 + 1$, nos levando a $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4$. Há, então $\binom{4+4-1}{4-1} = \binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = 35$ maneiras de escolher as casas do anel externo.

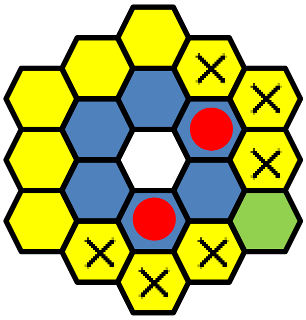
Com isso, há $6 \cdot 35 = 210$ maneiras de colocar os marcadores vermelhos tais que $[X, Y, Z] = [0,1,3]$.

b) Há duas maneiras de escolher as três casas do anel interno (as duas maneiras de escolher casas alternadas), e sobram $12 - 3 \cdot 9 = 3$ casas para colocar a última peça. Com isso, há $2 \cdot 3 = 6$ possibilidades no caso $[X, Y, Z] = [0,3,1]$.



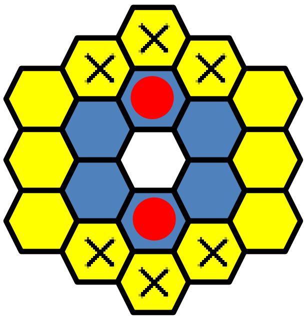
c) Dividimos o problema em dois casos, de acordo com as posições relativas entre as duas peças no anel interior:

I. as duas peças têm exatamente uma casa vazia entre si: há 6 escolhas para esse par de casa (veja, por exemplo, a casa vazia entre elas).



Nesse caso, podemos escolher a casa vazia destacada e uma das outras cinco disponíveis, ou duas das cinco casas, o que pode ser feito de $\binom{5}{2} - 4 = 6$ maneiras. O total nesse caso é $6 \cdot (1 \cdot 5 + 6) = 66$.

II. as duas peças estão em vértices opostos: nesse caso há três pares de vértices opostos.



Agora, podemos escolher as duas casas da ponta de cada uma das duas fileiras de três casas livres no anel externo (duas possibilidades), ou uma casa de cada fileira, o que pode ser feito de $3 \cdot 3 = 9$ maneiras. Há $3 \cdot (2 + 9) = 33$ maneiras nesse caso.

Com isso, há $66 + 33 = 99$ maneiras no caso [0,2,2].

d) Os espaços entre as casas são $y_1 = x_1 + 1$, $y_2 = x_2 + 1$, $y_3 = x_3 + 1$ e $y_4 = x_4 + 1$, com x_i natural. Com isso, como sobraram $12 - 4 = 8$ casas, devemos ter $(x_1 + 1) + (x_2 + 1) + (x_3 + 1) + (x_4 + 1) = 8$, ou seja, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4$. Já vimos que há 35 soluções. Depois multiplicamos por 12 e dividimos por 4, obtendo o total de $35 \cdot \frac{12}{4} = 105$ maneiras no caso [0,0,4].

e) O único caso que falta é [1,0,3], pois se colocamos uma peça na casa central não podemos colocar peças no anel interior, e não podemos colocar as quatro peças no anel interior sem que haja duas peças em casas vizinhas. Só nos resta distribuir 3 peças no anel exterior. A equação correspondente é $(x_1 + 1) + (x_2 + 1) + (x_3 + 1) = 12 - 3$, ou seja, $x_1 + x_2 + x_3 = 6$, que tem $\binom{6+3-1}{3-1} = \binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{2!} = 28$ soluções. Multiplicamos por 12 e dividimos por 3, obtendo $28 \cdot \frac{12}{3} = 112$.

Portanto o total é $210 + 6 + 99 + 105 + 112 = 532$.

f) Além de escolher as casas com peças vermelhas, sobram 15 escolhas para a casa vazia. Sem restrições, há $\binom{19}{4} \cdot 15$ maneiras de distribuir as 18 peças, só considerando as cores das peças. Assim, a probabilidade pedida é

$$\frac{532 \cdot 15}{\binom{19}{4} \cdot 15} = \frac{532}{\binom{19}{4}} = \frac{4 \cdot 7 \cdot 19}{\frac{19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{4!}} = \frac{7 \cdot 4 \cdot 4!}{18 \cdot 17 \cdot 16} = \frac{7}{51}.$$

Critérios

Item a: 0,5 ponto

Reduzir o problema para o anel de fora..0,1 ponto

Notar que o problema pode ser reduzido a um problema de bolas e cestos (nos espaços vazios)..0,2 ponto

Concluir a demonstração do número de possibilidades..0,2 ponto

Item b: 0,4 ponto

Explicar que há duas configurações do anel interno ou 3 configurações do anel externo para cada do anel interno..0,2 ponto

Escrever ambas as observações acima...0,1 ponto

Terminar a contagem corretamente...0,1 ponto

Item c: 0,6 ponto

Dividir em duas configurações do anel interno..0,1 ponto

Realizar a contagem corretamente em cada caso...0,2 ponto cada

Somar com os pesos adequados cada caso e obter o valor correto...............................0,1 ponto

Item d: 0,5 ponto

Obter que $m = 4$...0,3 ponto

Lembrar de multiplicar o resultado por 12...0,1 ponto

Lembrar de dividir o resultado por 4...0,1 ponto

(Atenção: o aluno só pode receber os dois últimos itens, se receber o primeiro)

Item e: 0,5 ponto

Explicar que só falta computar (1,0,3)..0,1 ponto

Reduzir esse caso a um problema de bolas e cestos..0,2 ponto

Acertar o resultado desse caso...0,1 ponto

Achar a resposta total corretamente...0,1 ponto

Item f: 0,5 ponto

Multiplicar $\binom{19}{4}$ pelas casas vermelhas...0,2 ponto

Multiplicar 15 pela casa vazia...0,1 ponto

Simplificar a fração da probabilidade e achar o resultado correto................................0,2 ponto

(Respostas não simplificadas ganham apenas 0,1 ponto do último item)

PROBLEMA 5 – Valor: 3 pontos

Solução.

a) Sendo $n = {p_1}^{\alpha_1} \cdot {p_2}^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot {p_t}^{\alpha_t}$. Temos

$$n^k = ({p_1}^{\alpha_1} \cdot {p_2}^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot {p_t}^{\alpha_t})^k = {p_1}^{k\alpha_1} \cdot {p_2}^{k\alpha_2} \cdot \dots \cdot {p_t}^{k\alpha_t}$$

Pela fórmula

$$D(n^k) = n^k \cdot \left(\frac{k\alpha_1}{p_1} + \frac{k\alpha_2}{p_2} + \dots + \frac{k\alpha_t}{p_t}\right)$$

Botamos k em evidência e escrevemos n^k como $n^{k-1} \cdot n$:

$$D(n^k) = k \cdot n^{k-1} \cdot n \cdot \left(\frac{\alpha_1}{p_1} + \frac{\alpha_2}{p_2} + \dots + \frac{\alpha_t}{p_t}\right) = k \cdot n^{k-1} \cdot D(n)$$

b) Seja $\{p_1, p_2 \cdot \dots \cdot p_t\}$ a união dos fatores primos de x e y. Podemos escrever $x = p_1^{x_1} \cdot \dots \cdot p_t^{x_t}$ e $y = p_1^{y_1} \cdot \dots \cdot p_t^{y_t}$ em que alguns x_i ou y_j podem ser zero. Temos $xy = p_1^{x_1+y_1} \cdot \dots \cdot p_t^{x_t+y_t}$ e

$$L(xy) = \frac{D(xy)}{xy} = \frac{x_1 + y_1}{p_1} + \dots + \frac{x_t + y_t}{p_t} = \frac{x_1}{p_1} + \frac{y_1}{p_1} + \dots + \frac{x_t}{p_t} + \frac{y_t}{p_t}$$

$$L(xy) = \left(\frac{x_1}{p_1} + \dots + \frac{x_t}{p_t}\right) + \left(\frac{y_1}{p_1} + \dots + \frac{y_t}{p_t}\right) = L(x) + L(y)$$

c) Como já vimos no item anterior, $L(n) = \frac{D(n)}{n} = \frac{\alpha_1}{p_1} + \frac{\alpha_2}{p_2} + \dots + \frac{\alpha_t}{p_t}$. Os primos que aparecem na fatoração de $n!$ são exatamente os primos p com $p \leq n$. Resta calcular o expoente de p na fatoração de $n!$. O número de múltiplos de p é $\left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor$. Somando essa parcela, cada múltiplo de p contribui com um fator p. O número de múltiplos de p^2 é $\left\lfloor\frac{n}{p^2}\right\rfloor$. Somando essa parcela, cada múltiplo de p^2

contribui com mais um fator p, pois possui pelo menos dois fatores p. Seguindo assim, os números com k fatores p são múltiplos p^k e contribuem com k na soma nas parcelas $\left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor$, $\left\lfloor\frac{n}{p^2}\right\rfloor$, ..., $\left\lfloor\frac{n}{p^k}\right\rfloor$. Assim,

$$L(n!) = \sum_{\substack{p\ primo \\ p \le n}} \frac{expoente\ de\ p\ em\ n!}{p} = \sum_{\substack{p\ primo \\ p \le n}} \frac{1}{p}\left(\left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{n}{p^2}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{n}{p^3}\right\rfloor + \cdots\right)$$

d) Sabemos que $\lfloor x \rfloor \le x$ para todo x real. Assim, o expoente de p em $n!$ pode ser limitado por

$$\left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{n}{p^2}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{n}{p^3}\right\rfloor + \cdots \le \frac{n}{p} + \frac{n}{p^2} + \cdots = n\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \cdots\right) = n \cdot \frac{\frac{1}{p}}{1 - \frac{1}{p}} = \frac{n}{p-1}$$

Usamos a soma da PG infinita com $x = \frac{1}{p}$.

Usando esse resultado em cada parcela temos

$$L(n!) = \sum_{\substack{p\ primo \\ p \le n}} \frac{1}{p}\left(\left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{n}{p^2}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{n}{p^3}\right\rfloor + \cdots\right) \le \sum_{\substack{p\ primo \\ p \le n}} \frac{n}{p(p-1)} = n \cdot \sum_{\substack{p\ primo \\ p \le n}} \frac{1}{p(p-1)}$$

Agora usando a dica do enunciado

$$\sum_{\substack{p\ primo \\ p \le n}} \frac{1}{p(p-1)} < \sum_{m=2}^{\infty}\left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}\right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = 1$$

Portanto, $L(n!) < n \cdot 1 = n$.

e) Veja que $L(n!) < n$ é equivalente a

$$\frac{L(1) + L(2) + \cdots + L(n)}{n} < 1$$

e o valor médio de $L(x)$ de 1 até n é menor que 1.

Suponha que os n tais que $L(n) \le 2$ são finitos e seja m o maior número que satisfaz essa desigualdade. Para todo $r > m$ temos $L(r) > 2$. Tome na expressão anterior $n = 2m$:

$$1 > \frac{L(1) + L(2) + \cdots + L(2m)}{2m} > \frac{L(m+1) + \cdots + L(2m)}{2m} > \frac{2m}{2m} = 1$$

Uma contradição! Portanto, os n tais que $L(n) \le 2$ são infinitos.

f) Temos $p_i \le q$ para todo i, então usando a fatoração em primos

$$n = {p_1}^{\alpha_1} \cdot {p_2}^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot {p_t}^{\alpha_t} \le q^{\alpha_1} \cdot q^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot q^{\alpha_t} = q^{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_t}$$

$$\Rightarrow \log_{\mathrm{q}} n \le \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_t$$

$$\Rightarrow \frac{\ln n}{\ln q} \le \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_t$$

E usando a expressão de $L(n)$ temos:

$$L(n) = \frac{\alpha_1}{p_1} + \frac{\alpha_2}{p_2} + \cdots + \frac{\alpha_t}{p_t} \ge \frac{\alpha_1}{q} + \frac{\alpha_2}{q} + \cdots + \frac{\alpha_t}{q} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_t}{q} \ge \frac{1}{q} \cdot \frac{\ln n}{\ln q}$$

g) Se $L(n) \le 2$, na expressão do item f temos

$$\frac{1}{q} \cdot \frac{\ln n}{\ln q} \le L(n) \le 2 \Rightarrow \ln n \le 2q \cdot \ln q = \ln q^{2q} \Rightarrow n \le q^{2q}$$

Significa que os n com $L(n) \le 2$ são limitados e, portanto, finitos. Porém, no item e vimos que existem infinitos n tais que $L(n) \le 2$. Temos uma contradição na suposição de que há o maior primo e podemos concluir que há infinitos primos.

Critérios

Item a: 0,4 ponto

Critério 1:

Expressar $D(n^k)$ em função de n e seus fatores primos..0,2 ponto

Fatorar a expressão e obter o resultado pedido...0,2 ponto

Critério 2:

Escrever uma indução em k...0,2 ponto

Concluir que a expressão desejada é válida...0,2 ponto

Item b: 0,2 ponto

Critério 1:

Expressar $L(xy)$ em função da união dos primos de x e y..0,1 ponto

Obter a expressão desejada..0,1 ponto

Critério 2:

Dividir $D(xy) = xD(y) + yD(x)$ por xy e obter a expressão desejada........................0,2 ponto

Item c: 0,5 ponto

Obter que $L(n!) = \sum_{p<n} \frac{v_p(n!)}{p}$...0,2 ponto

Achar $v_p(n!)$..0,2 ponto

Concluir o item..0,1 ponto

Item d: 0,5 ponto

Utilizar-se de $\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \leq \frac{n}{p^k}$ para mostrar que $v_p(n!) \leq \frac{n}{p-1}$..0,2 ponto

Concluir que $L(n!) \leq n \sum_{j>2} \frac{1}{j(j-1)}$...0,2 ponto

Concluir o item com o lema dado..0,1 ponto

Item e: 0,5 ponto

Reescrever o item anterior em função de $L(j)$s...0,1 ponto

Supor que todos os js com $L(j) \leq 2$ são menores que um dado m.............................0,2 ponto

Obter uma contradição com o item anterior..0,2 ponto

Item f: 0,4 ponto

Obter que $L(n) > \frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_t}{q}$...0,2 ponto

Obter que $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_t \geq \frac{\log(n)}{\log(q)}$..0,2 ponto

Item g: 0,5 ponto

Mostrar que os n com $L(n) \leq 2$ seriam finitos...0,3 ponto

Obter uma contradição com os itens anteriores...0,2 ponto

PROBLEMA 6 – Valor: 4 pontos

Solução.

a) Os triângulos VMK e VAC são semelhantes por AA, já que MK paralelo a AC por simetria. Daí, as alturas tem a mesma proporção das bases $\frac{VR}{VO}=\frac{MK}{AC}=\frac{\phi}{d}$.

b) Usando o Teorema de Menelaus no triângulo ROS com a reta VD:

$$\frac{RV}{VO}\cdot\frac{OD}{DS}\cdot\frac{SL}{LR}=1$$

c) Usando o resultado dado no enunciado e o dado do item a temos

$$\frac{\phi}{d}\cdot\frac{d/2}{DS}\cdot\phi^2=1\Rightarrow DS=\frac{\phi^3}{2}$$

Observe a base do tetraedro. Veja que BSP é um triângulo retângulo isósceles (a diagonal do quadrado forma ângulo de $45°$) e $BS=SP=\frac{1}{2}$. Como $\phi^2=\phi+1$ temos $\phi^3=\phi^2+\phi \Leftrightarrow \phi^3+1=\phi^2+\phi+1 \Leftrightarrow \phi^3+1=2\phi^2$. Assim,

$$BD=DS+SP=\frac{\phi^3}{2}+\frac{1}{2}=\frac{\phi^3+1}{2}\Rightarrow BD=\phi^2$$

d) Vamos usar o Teorema de Pitágoras no triângulo ROS. Para isso precisamos calcular OR e OS.

Voltando ao item a e usando $VO=h$ e $d=\phi^2$, temos $VR=VO\cdot\frac{\phi}{d}=\frac{h}{\phi}$. Com isso, temos $OR=VO-VR=h\left(1-\frac{1}{\phi}\right)$.

Voltando no item c, temos $DS=\frac{\phi^3}{2}$. Sabemos também que $OD=\frac{d}{2}=\frac{\phi^2}{2}$. Logo, $OS=DS-OD=\frac{\phi^3}{2}-\frac{\phi^2}{2}=\frac{\phi^3-\phi^2}{2}=\frac{\phi}{2}$.

Aplicando o Teorema de Pitágoras, $RS^2=OR^2+OS^2=h^2\left(1-\frac{1}{\phi}\right)^2+\frac{\phi^2}{4}$.

e) Usando o Teorema de Pitágoras no triângulo LSP: $LS^2=LP^2-SP^2=\phi^2-\frac{1}{4}$. Foi dado que $\frac{LR}{LS}=\frac{1}{\phi^2}$. Trocando numerador por denominador menos numerador dos dois lados $\frac{LS-LR}{LS}=\frac{\phi^2-1}{\phi^2}\Leftrightarrow\frac{RS}{LS}=\frac{\phi}{\phi^2}\Leftrightarrow RS=\frac{LS}{\phi}$. Elevando ao quadrado, $RS^2=\frac{LS^2}{\phi^2}=1-\frac{1}{4\phi^2}$.

f) Substituindo a expressão de RS^2 na equação do item d temos

$$1-\frac{1}{4\phi^2}=h^2\left(1-\frac{1}{\phi}\right)^2+\frac{\phi^2}{4}$$

Multiplicando tudo por ϕ^2 temos $\phi^2-\frac{1}{4}=h^2(\phi-1)^2+\frac{\phi^4}{4}$. Vamos manipular o ϕ. Já sabemos que $\phi^3=\phi^2+\phi$. Trocando ϕ^2 por $\phi+1$ temos $\phi^3=2\phi+1$. Multiplicando por ϕ e substituindo ϕ^2 temos $\phi^4=2\phi^2+\phi=3\phi+2$. Isolando h^2 temos

$$h^2=\frac{\phi^2-\frac{1}{4}-\frac{\phi^4}{4}}{(\phi-1)^2}=\frac{4\phi^2-1-3\phi-2}{4(\phi-1)^2}=\frac{\phi^2}{4(\phi-1)^2}\Rightarrow h=\frac{\phi}{2(\phi-1)}$$

Dividindo $\phi^2=\phi+1$ por ϕ temos $\phi=1+\frac{1}{\phi}\Leftrightarrow\phi-1=\frac{1}{\phi}$. Substituindo na equação anterior chegamos em $h=\frac{\phi^2}{2}$.

A área da base é $lado^2=\frac{d^2}{2}=\frac{\phi^4}{2}$ e o volume da pirâmide é $\frac{1}{3}BH=\frac{1}{3}\cdot\frac{\phi^4}{2}\cdot\frac{\phi^2}{2}=\frac{\phi^6}{12}$.

Critérios

Item a: 1,5 ponto

Escrever a semelhança entre VMK e VAC .... 1,0 ponto

Concluir .... +0,5 ponto

Item b: 0,5 ponto

Esse item não tem pontuação parcial. Soluções completas recebem 0,5 ponto e qualquer outra coisa recebe 0,0 ponto.

Item c: 0,4 ponto

Esse item não tem pontuação parcial. Soluções completas recebem 0,4 ponto e qualquer outra coisa recebe 0,0 ponto.

Item d: 0,6 ponto

Aplicar Pitágoras em ORS .... 0,4 ponto

Concluir .... +0,2 ponto

Item e: 0,6 ponto

Encontrar LS^2 .... 0,3 ponto

Encontrar RS^2 .... +0,3 ponto

Item f: 0,4 ponto

Esse item não tem pontuação parcial. Soluções completas recebem 0,4 ponto e qualquer outra coisa recebe 0,0 ponto.

PROBLEMA 7 – Valor: 6 pontos

Solução.

a) Primeiro note que $d(V_i, V_j) \le 1$. Assim, observando que $|V_1| + |V_2| + \cdots + |V_n| = 1$,

$$d_2(P) = \sum_{1 \le i < j \le k} \frac{|V_i||V_j|}{n^2} d(V_i, V_j)^2 \le \sum_{1 \le i < j \le k} \frac{|V_i||V_j|}{n^2} = \frac{\sum_{1 \le i < j \le k} |V_i||V_j|}{(|V_1| + |V_2| + \cdots + |V_k|)^2}$$
$$= \frac{\sum_{1 \le i < j \le k} |V_i||V_j|}{\sum_{1 \le i \le k} |V_i|^2 + 2\sum_{1 \le i < j \le k} |V_i||V_j|} < 1.$$

b) Note que se $V_1 = X \cup Y$ e $X \cap Y = \emptyset$ então $|V_1| = |X| + |Y|$ e $e(V_1, V_i) = e(X, V_i) + e(Y, V_i)$, pois juntamos as arestas que ligam X a V_i com as que ligam Y a V_i. Temos

$$d_2(V_1, V_i) = \frac{e(V_1, V_i)^2}{|V_1||V_i|n^2} = \frac{1}{|V_i|n^2} \frac{\left(e(X, V_i) + e(Y, V_i)\right)^2}{|X| + |Y|}$$

e

$$d_2(X, V_i) + d_2(Y, V_i) = \frac{e(X, V_i)^2}{|X||V_i|n^2} + \frac{e(Y, V_i)^2}{|Y||V_i|n^2} = \frac{1}{|V_i|n^2}\left(\frac{e(X, V_i)^2}{|X|} + \frac{e(Y, V_i)^2}{|Y|}\right).$$

Assim, sendo $a = e(X, V_i)$, $b = e(Y, V_i)$, $x = |X|$ e $y = |Y|$, queremos provar que

$$\frac{(a+b)^2}{x+y} \le \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y},$$

que é verdade pela desigualdade de Cauchy-Schwartz ou, simplesmente desenvolvendo,

$$xy(x+y)\left(\frac{(a+b)^2}{x+y} - \frac{a^2}{x} - \frac{b^2}{y}\right) = xya^2 + 2xyab + xyb^2 - a^2xy - a^2y^2 - b^2x^2 - b^2xy = -(ay - bx)^2 \le 0.$$

c) Temos, pelo item anterior, $d_2(X, V_i) + d_2(Y, V_i) \ge d_2(V_1, V_i)$. Logo, separando X e Y temos

$$d_2(P') = d_2(X, Y) + \sum_{2 \le i \le k} \left(d_2(X, V_i) + d_2(Y, V_i)\right) + \sum_{2 \le i < j \le k} d_2(V_i, V_j) \ge \sum_{2 \le i \le k} d_2(V_1, V_i) + \sum_{2 \le i < j \le k} d_2(V_i, V_j) = d_2(P).$$

d) Basta considerar um termo:

$$\sum_{1 \le r, s \le 2} \frac{|X_r||Y_s|}{|X||Y|}\left(d(X_r, Y_s) - d(X, Y)\right)^2 \ge \frac{|X_1||Y_1|}{|X||Y|}\left(d(X_1, Y_1) - d(X, Y)\right)^2 > \frac{\varepsilon|X|\varepsilon|Y|}{|X||Y|}\varepsilon^2 = \varepsilon^4.$$

e) Abrindo a conta e separando o que não depende de r nem s temos

$$\sum_{1 \le r, s \le 2} \frac{|X_r||Y_s|}{|X||Y|}\left(d(X_r, Y_s) - d(X, Y)\right)^2$$
$$= \sum_{1 \le r, s \le 2} \frac{|X_r||Y_s|}{|X||Y|} d(X_r, Y_s)^2 - \frac{2d(X, Y)}{|X||Y|} \sum_{1 \le r, s \le 2} |X_r||Y_s| d(X_r, Y_s) + \frac{d(X, Y)^2}{|X||Y|} \sum_{1 \le r, s \le 2} |X_r||Y_s|$$
$$= \sum_{1 \le r, s \le 2} \frac{|X_r||Y_s|}{|X||Y|} d(X_r, Y_s)^2 - \frac{2d(X, Y)}{|X||Y|} \sum_{1 \le r, s \le 2} \frac{|X_r||Y_s| e(X_r, Y_s)}{|X_r||Y_s|} + \frac{d(X, Y)^2}{|X||Y|} \sum_{1 \le r, s \le 2} |X_r||Y_s|$$
$$= \sum_{1 \le r, s \le 2} \frac{|X_r||Y_s|}{|X||Y|} d(X_r, Y_s)^2 - \frac{2d(X, Y)}{|X||Y|} \sum_{1 \le r, s \le 2} e(X_r, Y_s) + \frac{d(X, Y)^2}{|X||Y|} \sum_{1 \le r, s \le 2} |X_r||Y_s|.$$

Agora, veja que:

$$\sum_{1\le r,s\le 2} e(X_r,Y_s) = e(X_1,Y_1)+e(X_1,Y_2)+e(X_2,Y_1)+e(X_2,Y_2) = e(X_1,Y_1\cup Y_2)+e(X_2,Y_1\cup Y_2) = e(X_1\cup X_2,Y) = e(X,Y) = d(X,Y)|X||Y|$$

$$\sum_{1\le r,s\le 2} |X_r||Y_s| = |X_1||Y_1|+|X_1||Y_2|+|X_2||Y_1|+|X_2||Y_2| = (|X_1|+|X_2|)(|Y_1|+|Y_2|) = |X||Y|$$

Substituindo, temos

$$\sum_{1\le r,s\le 2} \frac{|X_r||Y_s|}{|X||Y|}\big(d(X_r,Y_s)-d(X,Y)\big)^2 = \sum_{1\le r,s\le 2} \frac{|X_r||Y_s|}{|X||Y|} d(X_r,Y_s)^2 - \frac{2d(X,Y)}{|X||Y|} d(X,Y)|X||Y| + \frac{d(X,Y)^2}{|X||Y|}|X||Y|$$
$$= \sum_{1\le r,s\le 2} \frac{|X_r||Y_s|}{|X||Y|} d(X_r,Y_s)^2 - d(X,Y)^2.$$

Com isso,

$$\sum_{1\le r,s\le 2} \frac{|X_r||Y_s|}{|X||Y|}\big(d(X_r,Y_s)-d(X,Y)\big)^2 \ge \varepsilon^4 \Leftrightarrow \sum_{1\le r,s\le 2} \frac{|X_r||Y_s|}{|X||Y|} d(X_r,Y_s)^2 \ge d(X,Y)^2+\varepsilon^4.$$

f) Sejam $U_1, U_2, \dots, U_\ell$ os conjuntos V_j tais que (V_i,V_j) não é ε-regular. Marque cada elemento de V_i com os índices dos conjuntos U_m em que ele estava em $U_m^{1,m}$. Então cada elemento de V_i está marcado com um subconjunto de $\{1,2,\dots,\ell\}$, e podemos colocar os elementos de V_i marcados por cada subconjunto no mesmo conjunto W na partição W_i. Com isso, a quantidade de conjuntos na partição é no máximo a quantidade de subconjuntos de $\{1,2,\dots,\ell\}$, ou seja, $|W_i| = k_i \le 2^\ell \le 2^{k-1}$, pois no máximo $k-1$ conjuntos V_j não são ε-regulares com V_i.

Finalmente, como são k conjuntos V_i, $|P'| = |W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_k| = |W_1|+|W_2|+\cdots+|W_k| \le k\cdot 2^{k-1}$.

g) Fixe i e j e, considerando a construção dos W_i's, remonte $V_i^{1,j}$, $V_i^{2,j}$, $V_j^{1,i}$ e $V_j^{2,i}$, desfazendo um refinamento. Com isso,

$$d_2(P') = \sum_{1\le i<j\le k}\sum_{1\le r\le k_i}\sum_{1\le s\le k_j} d_2(W_{i,r},W_{j,s}) \ge \sum_{1\le i<j\le k}\sum_{1\le r,s\le 2} d_2(V_i^{r,j},V_j^{s,i}).$$

Pela definição de $d_2(\cdot,\cdot)$,

$$d_2(P') \ge \sum_{1\le i<j\le k}\sum_{1\le r,s\le 2} \frac{|V_i^{r,j}||V_j^{s,i}|}{n^2} d(V_i^{r,j},V_j^{s,i})^2 = \sum_{1\le i<j\le k} \frac{|V_i||V_j|}{n^2} \sum_{1\le r,s\le 2} \frac{|V_i^{r,j}||V_j^{s,i}|}{|V_i||V_j|} d(V_i^{r,j},V_j^{s,i})^2.$$

h) Se (V_i,V_j) é ε-regular, na expressão dada, $V_i^{2,j} = V_j^{2,i} = \emptyset$, e na soma a seguir só temos o termo em $r=s=1$, em que $V_i^{1,j} = V_i$ e $V_j^{1,i} = V_j$, de modo que

$$\sum_{1\le r,s\le 2} \frac{|V_i^{r,j}||V_j^{s,i}|}{|V_i||V_j|} d(V_i^{r,j},V_j^{s,i})^2 = \frac{|V_i^{1,j}||V_j^{1,i}|}{|V_i||V_j|} d(V_i^{1,j},V_j^{1,i})^2 = d(V_i,V_j)^2.$$

Assim, pelo item e, para todos V_i e V_j,

$$\sum_{1\le r,s\le 2} \frac{|V_i^{r,j}||V_j^{s,i}|}{|V_i||V_j|} d(V_i^{r,j},V_j^{s,i})^2 \ge d(V_i,V_j)^2 + \delta_{ij}\varepsilon^4,$$

em que $\delta_{ij} = 1$ se (V_i,V_j) é ε-regular e $\delta_{ij} = 0$ caso contrário.

Utilizando o item g e o item e,

$$d_2(P') \ge \sum_{1\le i<j\le k} \frac{|V_i||V_j|}{n^2} \sum_{1\le r,s\le 2} \frac{|V_i^{r,j}||V_j^{s,i}|}{|V_i||V_j|} d(V_i^{r,j},V_j^{s,i})^2 \ge \sum_{1\le i<j\le k} \frac{|V_i||V_j|}{n^2}\big(d(V_i,V_j)^2 + \delta_{ij}\varepsilon^4\big)$$
$$= \sum_{1\le i<j\le k} \frac{|V_i||V_j|}{n^2} d(V_i,V_j)^2 + \varepsilon^4 \sum_{\substack{1\le i<j\le k\\ (V_i,V_j)\text{ não }\varepsilon\text{-regular}}} \frac{|V_i||V_j|}{n^2} \ge d_2(P) + \varepsilon^4\cdot\varepsilon k^2\cdot\frac{\frac{n}{k}\cdot\frac{n}{k}}{n^2} = d_2(P)+\varepsilon^5.$$

i) Pelo item a, para qualquer partição P de V, $d_2(P) \le 1$. Como cada refinamento descrito no item aumenta a energia $d_2(\cdot)$ em ε^5, só podemos refinar as partições mantendo-as não ε-regulares no máximo $1/\varepsilon^5$ vezes. Assim, se n é grande o suficiente, podemos continuar os refinamentos e, em algum momento, obteremos uma partição ε-regular.

Critérios

Item a: 1,0 ponto

Mostrar que $d_2(P) \leq \sum_{1\leq i<j\leq k} \frac{|V_i||V_j|}{n^2}$ .... 0,6 ponto

Concluir .... +0,4 ponto

Item b: 1,0 ponto

Reduzir a algo semelhante a $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{a^2+b^2}{x+y}$ .... 0,6 ponto

Concluir .... +0,4 ponto

Item c: 1,0 ponto

Abrir os somatórios e cancelar os termos relevantes .... 0,5 ponto

Concluir, usando o item b .... +0,5 ponto

Item d: 0,5 ponto

Esse item não tem pontuação parcial. Soluções completas recebem 0,5 ponto e qualquer outra coisa recebe 0,0 ponto.

Item e: 0,5 ponto

Esse item não tem pontuação parcial. Soluções completas recebem 0,5 ponto e qualquer outra coisa recebe 0,0 ponto.

Item f: 0,6 ponto

Mostrar que $k_i \leq 2^{k-1}$ .... 0,4 ponto

Mostrar que $|P'| \leq k \cdot 2^{k-1}$ .... +0,2 ponto

Item g: 0,4 ponto

Esse item não tem pontuação parcial. Soluções completas recebem 0,4 ponto e qualquer outra coisa recebe 0,0 ponto.

Item h: 0,6 ponto

Separar o somatório da definição de $d_2(P')$ em dois: um com pares ε-regulares e outro com pares não ε-regulares .... 0,3 ponto

Concluir .... +0,3 ponto

Item i: 0,4 ponto

Esse item não tem pontuação parcial. Soluções completas recebem 0,4 ponto e qualquer outra coisa recebe 0,0 ponto.